Pi in het oude India

Indiase wiskundigen hebben in de loop van de geschiedenis een grote bijdrage geleverd aan de wiskunde. Ze hebben onder andere onderzocht hoe je het getal π kunt benaderen. In de zesde eeuw schreef de grote Indiase wiskundige Aryabhata het volgende:

> Tel vier bij honderd op, vermenigvuldig vervolgens met acht en tel er dan tweeënzestigduizend bij op. Het resultaat is bij benadering de omtrek van een cirkel met diameter twintigduizend.

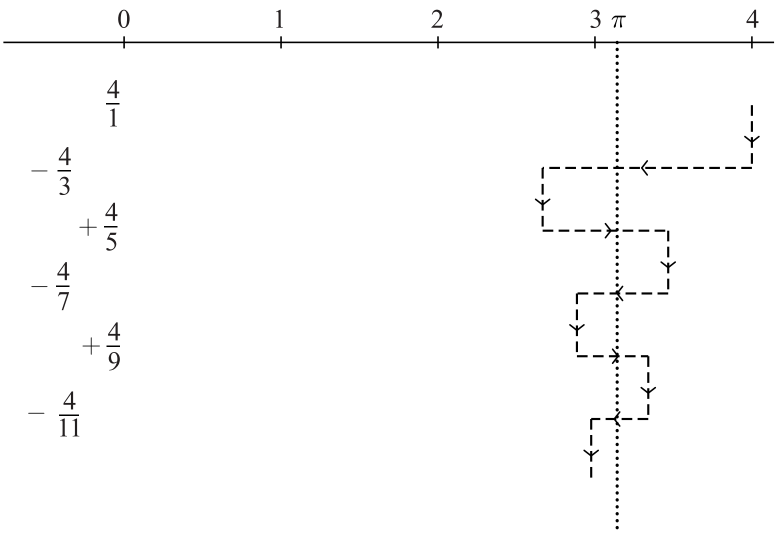
3p **19** Bereken, gebruikmakend van de formule $\textit{omtrek cirkel} = \pi \cdot \textit{diameter cirkel}$, in vier decimalen nauwkeurig welke waarde hieruit volgt voor het getal π.

Het is niet duidelijk hoe Aryabhata aan deze benadering gekomen is. In de 14e eeuw ontdekte de Indiase wiskundige Madhava een manier om de waarde van π te benaderen met behulp van een rij.
Hij begon met 4. Dat is groter dan π. Hij telde hier $-\frac{4}{3}$ bij op. Het resultaat $2\frac{2}{3}$ is nu kleiner dan π. Vervolgens telde hij bij het antwoord $\frac{4}{5}$ op. Het resultaat $3\frac{7}{15}$ is nu weer groter dan π.
Hij ging zo verder, dus:

$$\frac{4}{1}-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{7}+\frac{4}{9}-\frac{4}{11}+\ldots$$

Na elke nieuwe term die hij erbij optelde, kwam hij steeds dichter bij het getal π. Zie de figuur.

figuur



Madhava kon bewijzen dat hij op deze manier inderdaad steeds dichter bij de werkelijke waarde van π kwam. Nadeel van deze manier is echter wel dat je veel termen nodig hebt voor een redelijke benadering van π. Het resultaat na drie termen: $3\frac{7}{15}$ verschilt nog behoorlijk van π.

3p **20** Bereken hoeveel termen je minimaal nodig hebt om te zorgen dat het verschil met π kleiner is dan 0,1.

Madhava telde voor zijn benadering van π de termen van een rij bij elkaar op, namelijk de termen van de volgende rij: $\frac{4}{1}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{5}, -\frac{4}{7}, \frac{4}{9}, -\frac{4}{11}, ...$

Hieronder staan twee mogelijke formules voor deze rij. Van deze formules is er één juist en de andere niet.

I $\quad u_n = \dfrac{4 \cdot (-1)^{n-1}}{2n-1}$ met $n = 1, 2, 3, ...$

II $\quad u_n = \dfrac{(-4)^{n-1}}{2n-1}$ met $n = 1, 2, 3, ...$

3p **21** Onderzoek welke van deze twee formules de juiste is.

Madhava gaf ook een andere rij, die sneller tot een goede benadering van π leidde. De formule voor deze rij luidt:

$$v_n = \sqrt{12}\left(\frac{(-1)^n}{(2n+1) \cdot 3^n}\right) \text{ met } n = 0, 1, 2, 3, ...$$

Hiermee kon hij op soortgelijke wijze als boven een benadering van π vinden die steeds nauwkeuriger wordt naarmate meer termen gebruikt worden.

3p **22** Geef een benadering van π door de eerste drie termen van deze rij bij elkaar op te tellen en bereken het verschil met de werkelijke waarde van π in twee decimalen nauwkeurig.